Correction du devoir maison $n°5$

Intégrale de Gauss

1) Existence de la limite

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \leqslant y$.

Calculons $f(y) - f(x) = \displaystyle\int_0^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Or $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est une fonction positive.
D'où par positivité de l'intégrale, $f(y) - f(x) \geqslant 0$ i.e. $f(x) \leqslant f(y)$.
La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}t + \int_1^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 + \int_1^x t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) Soit $x \in [1; +\infty[$, $\displaystyle\int_1^x t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_1^x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x^2}\right) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$. D'où, $f(x) \leqslant 1 + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$.
De plus, f est croissante, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leqslant 1 + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$.
Conclusion : la fonction f est majorée.

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie : on la note $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2) Un encadrement de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0; \sqrt{n}\,[$. On a $-\frac{t^2}{n} \in]-1; 0]$, donc $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n}$.
En passant à l'exponentielle puis en élevant à la puissance n, on obtient :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}.$$

De plus, cette inégalité reste vraie pour $t = \sqrt{n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0; \sqrt{n}\,]$. On a $\frac{t^2}{n} \in [0; 1]$, donc $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{n}$ i.e. $-\frac{t^2}{n} \leqslant -\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)$.
En passant à l'exponentielle puis en élevant à la puissance n, on obtient :

$$\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \left[0; \sqrt{n}\right], \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

3) Des relations entre plusieurs intégrales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \qquad ; \qquad J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$$

a) On utilise le changement de variable $\mathscr{C}^1$ suivant $t = \sqrt{n}\tan(x)$ i.e. $x = \mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$:

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(x)\right)^{-n} \sqrt{n}\left(1 + \tan^2(x)\right) \mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2(x)\right)^{n-1} \mathrm{d}x$$

D'où

$$J_n = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(x)\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n}\,W_{2n-2}.$$

b) On utilise le changement de variable $\mathscr{C}^1$ suivant $t = \sqrt{n}\sin(x)$ i.e. $x = \text{Arcsin}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$:

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2(x)\right)^n \sqrt{n}\cos(x)\mathrm{d}x = \sqrt{n}W_{2n+1}$$

c)

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\,W_{2n-2}$$

4) Calcul de l'intégrale de Gauss

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}W_{2n+1} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\sqrt{2n+1}W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}W_{2n-2} = \sqrt{\frac{n}{2n-2}}\sqrt{2n-2}W_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Par théorème d'encadrement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.